UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

"Uno no puede escapar al pensamiento de que estas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente y una inteligencia propia, que son más inteligentes que nosotros y que sus descubridores, y que nosotros recibimos más de ellas que ellas de nosotros".

Henrich Hertz

"El pensamiento es sólo un relámpago entre dos largas noches, pero este relámpago lo es todo".

Henri Poncaire

"Newton no encontró la causa de que cayera la manzana, pero hizo ver una similitud entre la manzana y las estrellas".

D'Arcy Wentworth Thompson

¡Ay vida, qué emoción vivirte!

Pablo García y Colomé
PROFESOR DE CARRERA

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso del presente fascículo de matemáticas titulado *Funciones hiperbólicas*, elaborado por Pablo García y Colomé.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen al autor las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

ÍNDICE

PRÓLOGO 1

LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS A PARTIR DE LA HIPÉRBOLA 2

LA CATENARIA Y LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS 7

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS 11

FUNCIONES HIPERBÓLICAS. DOMINIOS, GRÁFICAS Y RECORRIDOS 13

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS 17

DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS 22

INTEGRACIÓN DE Y CON LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS 31

APLICACIONES 39

BIBLIOGRAFÍA 54

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

PRÓLOGO

EL concepto fundamental del Cálculo es el de función, que es el punto de partida para el tratamiento de los límites, que a su vez conducen a la derivada y a la integral, de gran importancia y trascendencia para el estudio de innumerables problemas de las matemáticas y la física en sus diversas manifestaciones en los campos de la teoría y las aplicaciones.

Dentro de las funciones trascendentes, es decir, aquéllas que para denotarse no requieren de operaciones algebraicas, destacan las funciones hiperbólicas, que al igual que las conocidas como circulares por derivarse de un círculo unitario, constituyen de manera semejante, toda una "trigonometría" que merece un análisis aparte.

Este trabajo tiene como objetivo apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo en la Facultad de Ingeniería, y está dirigido también a todos los estudiosos de las matemáticas que deseen conocer más sobre estas funciones que le dieron especial dignidad a una hipérbola "unitaria".

En este breve estudio, el lector encontrará definiciones, teoremas, fórmulas de derivación e integración, ejercicios e interesantes, además de ilustrativos, problemas de aplicación de estas singulares funciones.

El autor.

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS

ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

Un apoyo didáctico para la impartición y aprendizaje de las matemáticas en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

La formalización de innumerables conceptos del Cálculo tuvo lugar a finales del siglo XVII y en la primera mitad del siglo XVIII, con los grandes descubrimientos y brillantes aportaciones de célebres hombres de ciencia, quienes, en ocasiones de manera empírica, y en otras para resolver problemas y enfrentar situaciones diversas, definieron, diseñaron y construyeron poderosas herramientas matemáticas.

En el campo de las funciones escalares de variable escalar o vectorial, conocidas como funciones trascendentes, hubo quienes observaron que determinadas combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} se presentaban con mucha frecuencia en aplicaciones matemáticas y físicas. Valga citar en éstas últimas el hecho de que entidades como la luz, la velocidad, la electricidad o la radioactividad se absorben o extinguen en forma gradual, y su decaimiento se puede representar con funciones que consideran las combinaciones de funciones exponenciales como las antes citadas.

También se puede demostrar que una combinación de estas funciones describe la forma de un cable colgante, esto es, que si se suspende un cable pesado y flexible como el de una línea de transmisión o de una línea telefónica, dicha combinación define la ecuación de la curva.

*Estas funciones, combinaciones de funciones exponenciales, pueden ser deducidas de una hipérbola, de la misma forma que las trigonométricas tienen como base al círculo unitario. Y es por ello que se dio por llamarlas **Funciones hiperbólicas**.*

El primer científico que publicó un profundo y completo estudio de las funciones hiperbólicas fue el matemático suizo-alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777), colega del célebre matemático Leonhard Euler (1707-1783).

LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS A PARTIR DE LA HIPÉRBOLA.

A continuación se definirán las funciones hiperbólicas a partir de una hipérbola, siguiendo los mismos pasos realizados para construir la trigonometría del círculo. Las funciones trigonométricas circulares se definieron en relación con la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y de ahí su nombre. De manera semejante, las funciones hiperbólicas se definirán a partir de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

Considérese la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, y sea P(x,y) un punto de ella en el primer cuadrante, como se observa en la Figura 1.

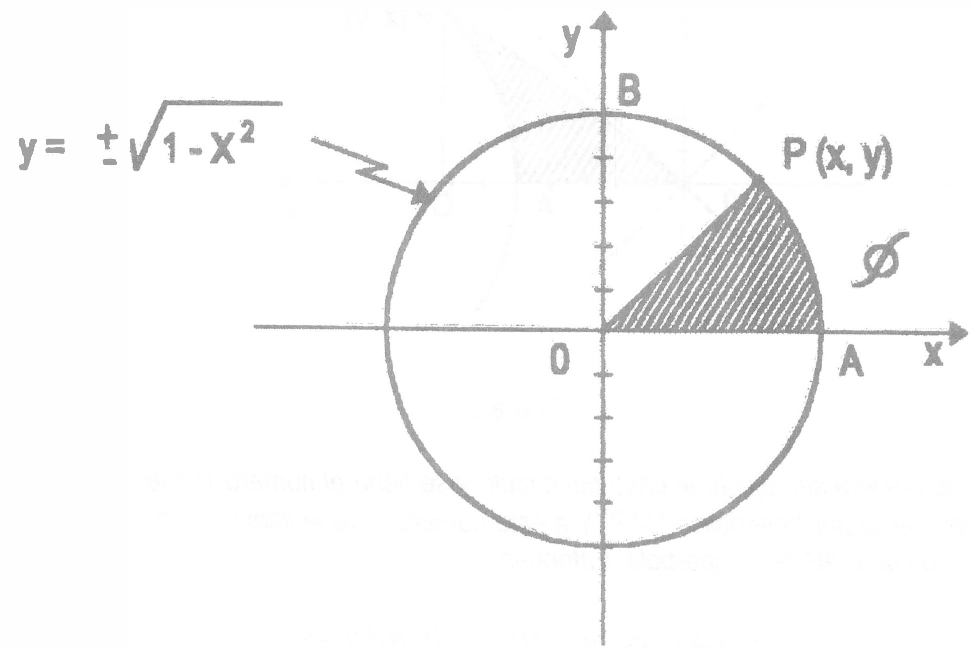


Figura 1

De la figura se puede expresar que:

$$\text{Área del Sector Circular } OAP = \frac{\pi . r^2}{2\pi}\phi = \frac{\phi}{2}u^2$$

$$\text{Área del triángulo } OAB = \frac{1}{2}u^2$$

de donde

$$\phi = \frac{\text{Área del Sector Circular } OAP}{\text{Área del triángulo } OAB} = \frac{\frac{\phi}{2}}{\frac{1}{2}} = \phi$$

Entonces, el arco ϕ puede considerarse como la razón entre el área del sector OAP y el área del triángulo OAB.

Aquí también cabría notar que la medida del ángulo ϕ puede definirse como el doble del área del sector circular OAP que el ángulo determina en el círculo unitario.

Ahora considérese la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y un punto de ella P(x,y) en el primer cuadrante. Para ello habrá que analizar la gráfica mostrada en la Figura 2.

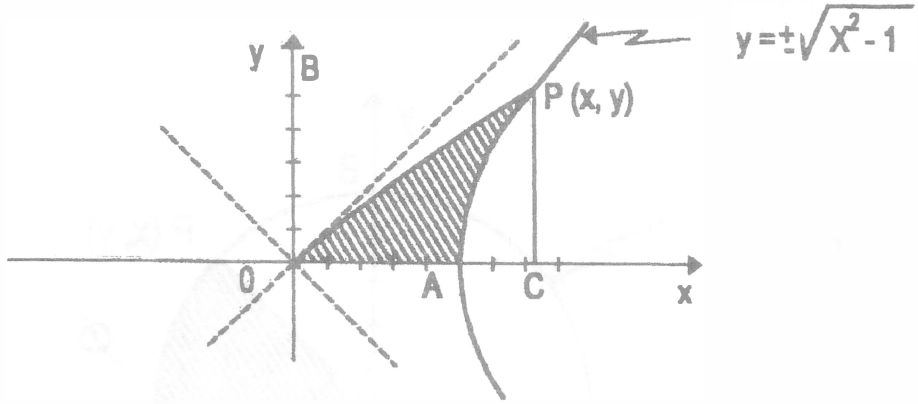


Figura 2

Se procede de manera semejante al caso del círculo y se tiene el número θ que se define como el doble del área del sector hiperbólico OAP. Y a este número θ se le llama la medida hiperbólica del ángulo AOP, con arco AP de la hipérbola. Entonces

$$\theta = \frac{\text{Área del sector } OAP}{\text{Área del triángulo } OAB} = \frac{\text{Área del sector } OAP}{\frac{1}{2}}$$

El cálculo del área del sector OAP se determina como sigue, de acuerdo con la Figura 2:

Área del sector OAP = Área del triángulo OCP – Área ACP

donde el área ACP es la limitada por la hipérbola, el eje de las abscisas y las rectas x = A y x = C. Esta área se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Área } ACP = \int_1^x \sqrt{z^2 - 1}\, dz$$

se resuelve la integral indefinida mediante el método de sustitución trigonométrica y

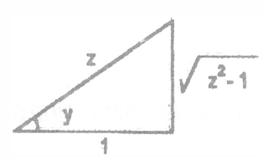


Figura 3

$$z = \sec y \qquad dz = \sec y \tan y dy \qquad \sqrt{z^2 - 1} = \tan y$$

Se realizan las sustituciones correspondientes y la integral definida queda como

$$\int \tan y \sec y \tan y dy = \int \sec y \tan^2 y dy = \int \sec y(\sec^2 y - 1)dy = \int \sec^3 y dy - \int \sec y dy$$

$$= \int \sec^3 y dy - \ln|\sec y + \tan y| + C_1 = \int \sec^2 y \sec y dy - \ln|\sec y + \tan y| + C_1$$

El primer sumando, por separado, se resuelve "por partes", como sigue

$$u = \sec y \qquad dv = \sec^2 y dy$$

$$du = \sec y \tan y dy \qquad v = \tan y$$

luego

$$\int \sec^3 y dy = \sec y \tan y - \int \sec y \tan^2 y dy = \sec y \tan y - \int \sec y(\sec^2 y - 1)dy$$

$$= \sec y \tan y - \int \sec^3 y dy + \int \sec y dy$$

$$\int \sec^3 y dy = \frac{1}{2}\sec y \tan y + \frac{1}{2}\ln|\sec y + \tan y| + C$$

Se juntan ahora los resultados y se tiene que la integral definida equivale a:

$$\int_1^x \sqrt{z^2 - 1}\,.dz = \left[\frac{\sec y \tan y}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sec y + \tan y|\right]_1^x = \left[\frac{z\sqrt{z^2 - 1}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|z + \sqrt{z^2 - 1}\right|\right]_1^x$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$$

Como el área del triángulo OCP es igual a $\frac{xy}{2}$*, entonces*

$$\text{Área del sector } OAP = \frac{xy}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{xy}{2} + \frac{1}{2}\ln|x + y| = \frac{1}{2}\ln|x + y|$$

y por lo tanto, como el área del triángulo OAB es 1 / 2, se tiene que:

$$\theta = \frac{\frac{1}{2}\ln|x+y|}{\frac{1}{2}}; \qquad \textit{de donde} \qquad \theta = \ln|x+y|$$

DEFINICIÓN. Como en el caso de las funciones trigonométricas circulares, para la hipérbola dada, el punto P(x,y) de su gráfica y las condiciones obtenidas, se definen las funciones:

$$\text{sen}\,o\ \textit{hiperbólico de}\ \theta = PC = y = \text{senh}\,\theta$$

$$\cos eno\ \textit{hiperbólico de}\ \theta = OC = x = \cosh\theta$$

De la expresión $\theta = \ln|x+y|$ *es posible obtener*

$$e^{\theta} = x+y \qquad y \qquad e^{-\theta} = \frac{1}{x+y}$$

mediante la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, *y algunas operaciones algebráicas, se llega a*

$$y = y\cdot\frac{2}{2} = \frac{2y}{2}\cdot\frac{x+y}{x+y} = \frac{2xy+2y^2}{2(x+y)} = \frac{y^2+2xy+y^2}{2(x+y)} = \frac{x^2-1+2xy+y^2}{2(x+y)}$$

$$= \frac{x^2+2xy+y^2-1}{2(x+y)} = \frac{(x+y)^2-1}{2(x+y)} = \frac{\frac{(x+y)^2-1}{x+y}}{2} = \frac{x+y-\frac{1}{x+y}}{2} = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

$$x = x\cdot\frac{2}{2} = \frac{2x}{2}\cdot\frac{x+y}{x+y} = \frac{2x^2+2xy}{2(x+y)} = \frac{x^2+2xy+x^2}{2(x+y)} = \frac{y^2+1+2xy+x^2}{2(x+y)}$$

$$= \frac{x^2+2xy+y^2+1}{2(x+y)} = \frac{(x+y)^2+1}{2(x+y)} = \frac{\frac{(x+y)^2+1}{x+y}}{2} = \frac{x+y+\frac{1}{x+y}}{2} = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

por lo que

$$\text{senh}\,\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \qquad y \qquad \cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

Y en términos de estas dos funciones se definen la tangente hiperbólica, la cotangente hiperbólica, la secante hiperbólica y la cosecante hiperbólica, cuyas expresiones son:

$$tanh\theta = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} \qquad \coth\theta = \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}};\ \theta \neq 0$$

$$\sec h\theta = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}} \qquad \csc h\theta = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} = \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}};\ \theta \neq 0$$

Antes de entrar al estudio formal de estas funciones, se presenta a continuación un interesante concepto físico donde se hace presente una de ellas.

LA CATENARIA Y LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Si se deja colgar libremente una cadena o un cable entre dos soportes, se forma una curva llamada catenaria (del griego katena que significa cadena). Las catenarias se encuentran por donde uno mira: una reata de tender, un cable telefónico; los cables de suspensión de un puente, etcétera. La forma depende del peso y tensión del cable pero sus ecuaciones son todas de la misma forma y están íntimamente relacionadas con la función exponencial.

Sea la catenaria de la siguiente figura:

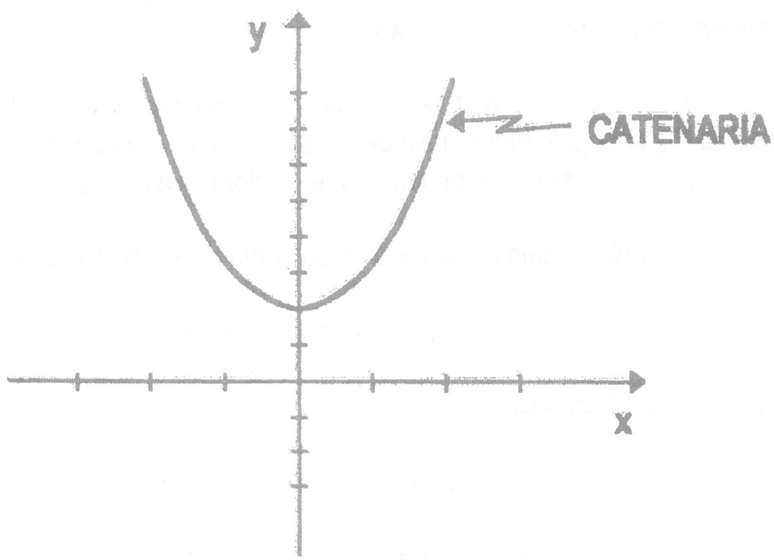


Figura 4

Se considerará una sección de catenaria, como se observa en la Figura 5, donde se analizarán las diferentes fuerzas que intervienen en ella.

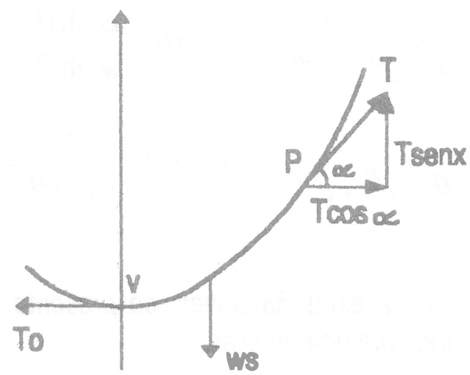


Figura 5

Si se toman en cuenta las fuerzas que actúan en el arco VP, en donde V es el punto más bajo de la catenaria, se tienen las dadas por:

La tensión en el cable en el punto V. Esta fuerza, como la tensión en cualquier punto de la curva, tiene la dirección de la tangente geométrica; de no ser así, obligaría al cable a tomar otra forma. Si la magnitud de esta tensión es T_0, se representa esta fuerza mediante el vector $(-T_0, 0)$.

El peso del cable VP. Si la longitud de VP es "s" y el peso por unidad de longitud es "w", entonces la magnitud del peso total es ws y como el peso actúa hacia abajo, puede representarse mediante el vector (0, -ws).

La tensión en el punto P. La dirección de ésta también es tangente a la curva y si su magnitud es T y el ángulo entre el eje de las abscisas y la dirección tangente es α $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$, entonces la fuerza está dada por el vector $(T\cos\alpha, T\text{sen}\,\alpha)$.

Como el cable está en equilibrio bajo estas fuerzas, su suma debe ser el vector cero, por lo que

$$(-T_0, 0) + (0, -ws) + (T\cos\alpha, T\text{sen}\,\alpha) = (0, 0)$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$-T_0 + T\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\alpha = T_0$$

y

$$-ws + T\,\text{sen}\,\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T\,\text{sen}\,\alpha = ws$$

Sea la tensión $T_0 = wc$ donde c es una constante que debe ser determinada. Entonces $T\cos\alpha = wc$ y se puede escribir

$$\frac{T\,\text{sen}\,\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{ws}{wc} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{ws}{wc} = \frac{s}{c} \quad \Rightarrow \quad s = c\tan\alpha$$

La gráfica de la curva queda completamente determinada por esta ecuación. Ahora se transformará en una forma más accesible.

Se determinarán las ecuaciones paramétricas de la recta PQ en términos del parámetro α (Figura 6). Esta recta es tangente en el punto P a la curva del cable.

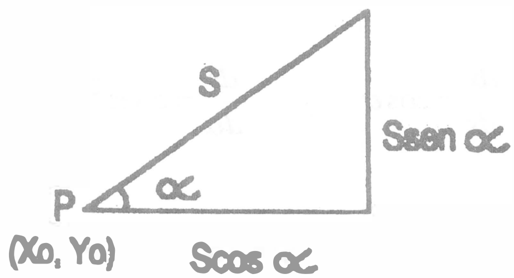


Figura 6

$$x = x_0 + s\cos\alpha \quad y \quad y = y_0 + s\,\text{sen}\,\alpha$$

de donde

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha \qquad y \qquad \frac{dy}{ds} = \text{sen}\,\alpha$$

Ahora bien, si se aplica la regla de la cadena para obtener $\frac{dy}{d\alpha}$, *se tiene que:*

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{d\alpha}$$

como

$$\frac{dy}{ds} = \text{sen}\,\alpha \qquad y \qquad \frac{ds}{d\alpha} = c\sec^2\alpha$$

se puede escribir

$$\frac{dy}{d\alpha} = \text{sen}\,\alpha\cdot c\sec^2\alpha = c\sec\alpha . tan\alpha$$

se integra y se llega a:

$$y = \int c\sec\alpha\; tan\alpha . d\alpha = c\sec\alpha + C_1$$

si se escogen unos ejes tales que y = c cuando α = 0, entonces C_1 = 0 y se puede escribir que:

$$y = c\sec\alpha$$

Si se hace algo semejante para la variable x se tiene que:

$$\frac{dx}{d\alpha}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{d\alpha}$$

pero

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha \qquad y \qquad \frac{ds}{d\alpha}=c\sec^2\alpha$$

luego

$$\frac{dx}{d\alpha}=\cos\alpha\cdot c\sec^2\alpha=c\sec\alpha$$

se integra y

$$x=\int c\sec\alpha.d\alpha=c\ln(\sec\alpha+tan\alpha)+C_2$$

además, si x = 0 para α = 0, se tiene que C_2 = 0, luego

$$x=c\ln(\sec\alpha+tan\alpha)\Rightarrow\frac{x}{c}=\ln(\sec\alpha+tan\alpha)$$

y, mediante la función exponencial

$$e^{\frac{x}{c}}=\sec\alpha+tan\alpha$$

Por otro lado

$$e^{-\frac{x}{c}}=\frac{1}{e^{\frac{x}{c}}}=\frac{1}{\sec\alpha+tan\alpha}\cdot\frac{\sec\alpha-tan\alpha}{\sec\alpha-tan\alpha}=\sec\alpha-tan\alpha$$

se suman ahora las dos exponenciales y

$$e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}=(\sec\alpha+tan\alpha)+(\sec\alpha-tan\alpha)=2\sec\alpha$$

y como

$$\sec\alpha=\frac{y}{c}\Rightarrow e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}=2\cdot\frac{y}{c}$$

por lo tanto la ecuación cartesiana se puede expresar como y =c sec α, o bien

$$y = c \cdot \frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2}$$

La constante "c" puede tomarse como un factor de escala. Así, si se escoge la escala c=1, entonces la ecuación de la catenaria es $y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$, *ecuación que define una función que se usa frecuentemente en matemáticas aplicadas y que, como se observa, es el coseno hiperbólico. Así, para todo valor real de x en el tramo considerado*

$$y = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Si se desea obtener la pendiente de la tangente a la catenaria, se deriva y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

IDENTIDADES "TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS"

Así como en la trigonometría circular se tienen las conocidas identidades trigonométricas, para las funciones hiperbólicas se tienen también identidades entre las que las más importantes son las siguientes:

TEOREMA. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

Prueba.

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

luego

$$\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

TEOREMA. $tanh^2 x + \sec h^2 x = 1$

Prueba.

$$tanhx = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}; \qquad \sec hx = \frac{1}{\cosh x}$$

luego

$$tanh^2 x + \sec h^2 x = \left(\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cosh x}\right)^2 = \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} + \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{\operatorname{senh}^2 x + 1}{\cosh^2 x}$$

como $\operatorname{senh}^2 + 1 = \cosh^2 x$

$$tanh^2 x + \sec h^2 x = \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} = 1$$

TEOREMA. $\coth^2 x - \csc h^2 x = 1$

Prueba.

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}; \qquad \csc hx = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

luego

$$\coth^2 x - \csc h^2 x = \left(\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\operatorname{senh} x}\right)^2 = \frac{\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = \frac{\cosh^2 x - 1}{\operatorname{senh}^2 x}$$

Como $\cosh^2 x - 1 = \operatorname{senh}^2 x$

$$\coth^2 x - \csc h^2 x = \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} = 1$$

TEOREMA. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

Prueba.

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{senh} 2x$$

TEOREMA. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

Prueba.

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 1 + e^{-2x} + e^{2x} - 1 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{2\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)}{4} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \cosh 2x$$

Otras identidades importantes, cuyas pruebas se omiten, son las siguientes:

$$\operatorname{senh}^2 x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\cosh 2x$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x$$

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x - \cosh y = 2\operatorname{senh}\frac{x+y}{2}\operatorname{senh}\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2\operatorname{senh}\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y = 2\operatorname{senh}\frac{x-y}{2}\cosh\frac{x+y}{2}$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS. DOMINIOS, GRÁFICAS Y RECORRIDOS.

SENO HIPERBÓLICO. Como ya se vio

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

luego el valor de la función es real para cualquier valor real de x. Por lo que su dominio es $D_f = \Re$ y su gráfica está dada en la Figura 7

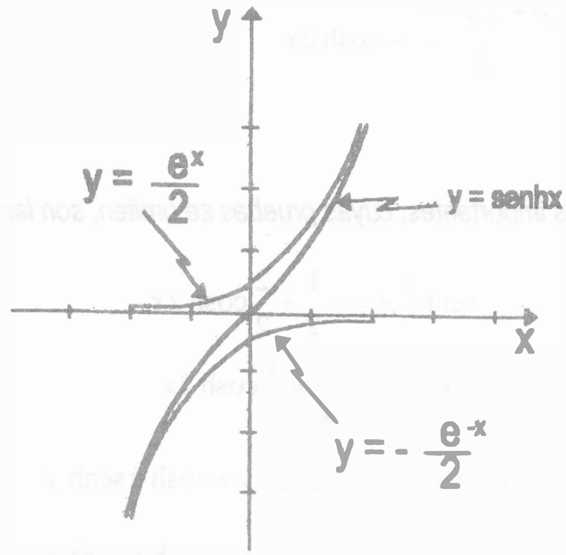


Figura 7

y como se observa, el recorrido de la función, es decir, los valores que adquiere la variable independiente, son el conjunto de los números reales, esto es, $R_f = \Re$

COSENO HIPERBÓLICO. Como ya se vio

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

de donde su dominio es $D_f = \Re$*, su gráfica, la de la siguiente figura*

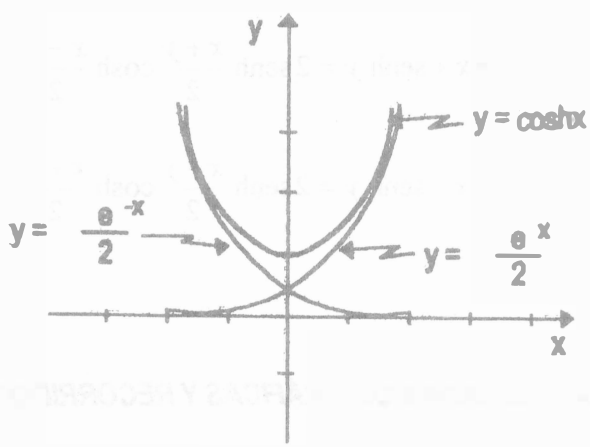


Figura 8

y, como se ve, el recorrido es $R_f = [1, \infty)$

TANGENTE HIPERBÓLICA. Como ya se vio

$$f(x) = tanhx = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

En la gráfica de cosh x se ve que ésta función no se anula en ningún valor de x, luego el dominio de tanhx es $D_f = \Re$ y su gráfica se muestra en la Figura 9.

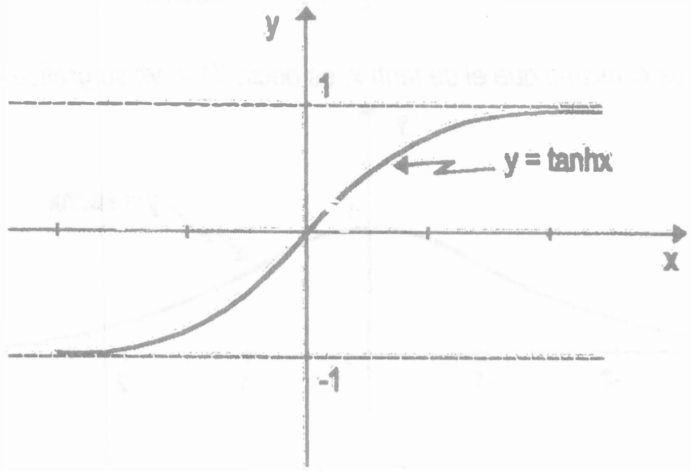


Figura 9

La gráfica de esta función tiene dos asíntotas horizontales de ecuaciones y = -1 y y y = 1, por lo que su recorrido es $R_f = (-1, 1)$.

COTANGENTE HIPERBÓLICA. Como ya se vio

$$f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{1}{tanhx}$$

La función senh x se hace cero únicamente en el origen; luego, el dominio de coth x es $D_f = \Re - \{0\}$*, su gráfica es la de la siguiente figura:*

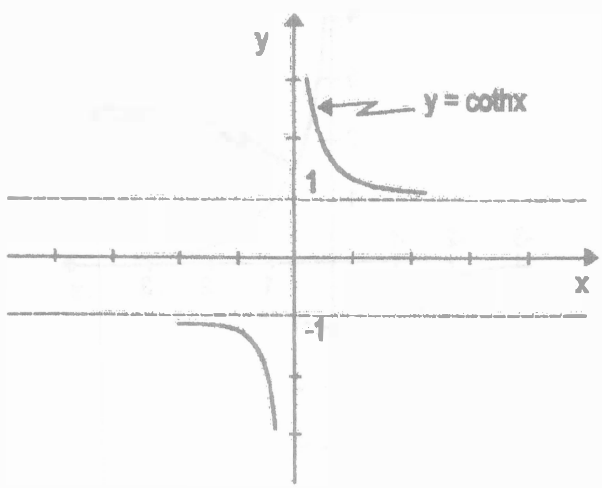


Figura 10

La gráfica tiene dos asíntotas horizontales de ecuaciones y = -1 y y = 1 y su recorrido es $R_f = \Re - [-1, 1]$.

SECANTE HIPERBÓLICA. Como ya se vio

$$f(x) = \sec hx = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$$

Por lo que su dominio es el mismo que el de tanh x, es decir, $D_f = \Re$; su gráfica es:

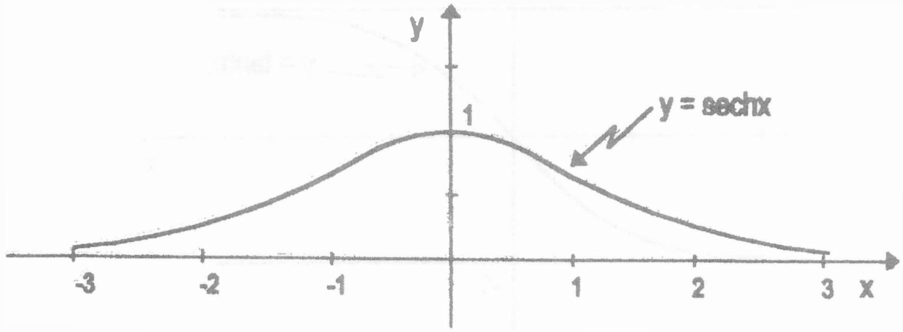


Figura 11

y como se observa, la gráfica tiene una asíntota en y = 0, luego su recorrido es $R_f = (0, 1]$

COSECANTE HIPERBÓLICA. Como ya se vio

$$f(x) = \csc hx = \frac{1}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

Su dominio es el mismo de la función coth x, esto es, $D_f = \Re - \{0\}$, su gráfica está dada por

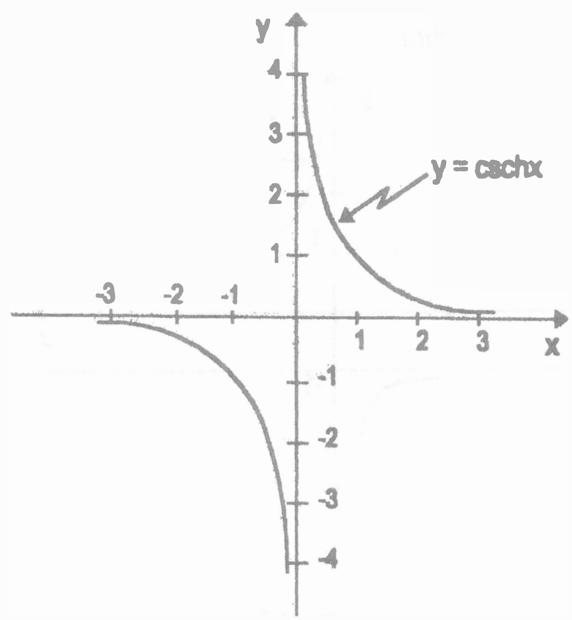


Figura 12

y como tiene una asíntota de ecuación y = 0, su recorrido es $R_f = \Re - \{0\}$.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Si se limita el dominio de las funciones cosh x y sech x y se establece como el conjunto de valores $x \in [0, \infty)$, entonces estas dos funciones, junto con las otras cuatro, son funciones inyectivas y, con la consideración de que en todas el recorrido es igual al codominio, lo que las hace suprayectivas, entonces las seis funciones hiperbólicas cumplen con ser biyectivas y admiten funciones inversas, las que se verán acontinuación, estableciendo en cada caso, su dominio, gráfica y recorrido, incluyendo lo correspondiente a las funciones hiperbólicas directas.

FUNCIÓN SENO HIPERBÓLICO INVERSA. $f^{-1}(x) = \text{senh}^{-1} x$

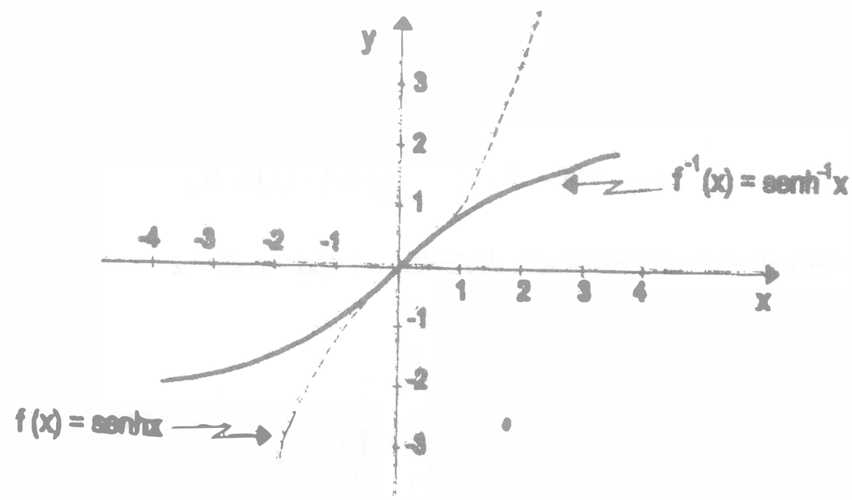


Figura 13

$$D_f = \Re = R_{f^{-1}}; \quad R_f = \Re = D_{f^{-1}}$$

FUNCIÓN COSENO HIPERBÓLICO INVERSA. $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$

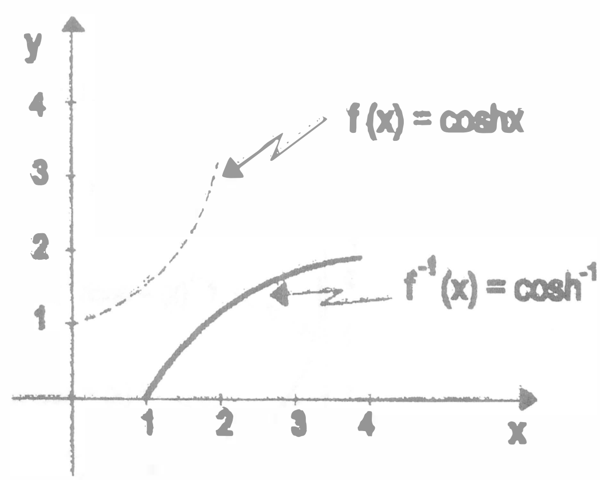


Figura 14

$$D_f = [0, \infty) = R_{f^{-1}}; \quad R_f = [1, \infty) = D_{f^{-1}}$$

FUNCIÓN TANGENTE HIPERBÓLICA INVERSA. $f^{-1}(x) = \tanh^{-1} x$

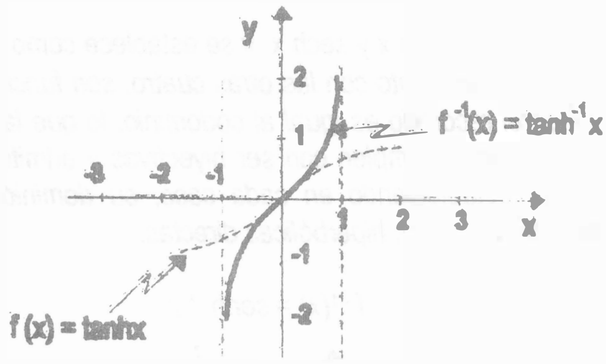


Figura 15

$$D_f = \Re = R_{f^{-1}}; \quad R_f = (-1,1) = D_{f^{-1}}$$

FUNCIÓN COTANGENTE HIPERBÓLICA INVERSA. $f^{-1}(x) = \coth^{-1} x$

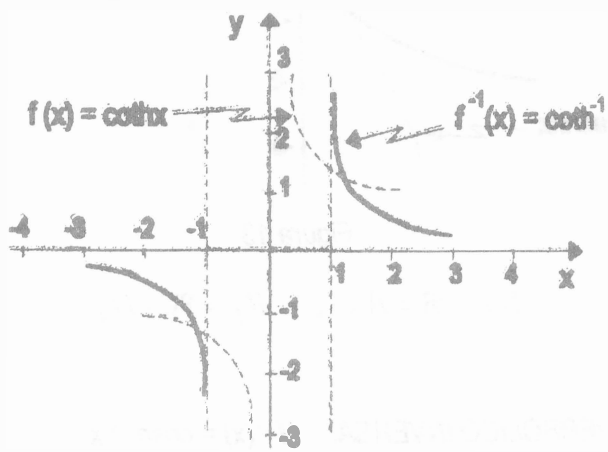


Figura 16

$$D_f = \Re - \{0\} = R_{f^{-1}}; \quad R_f = \Re - [-1,1] = D_{f^{-1}}$$

FUNCIÓN SECANTE HIPERBÓLICA INVERSA. $f^{-1}(x) = \text{sech}^{-1} x$

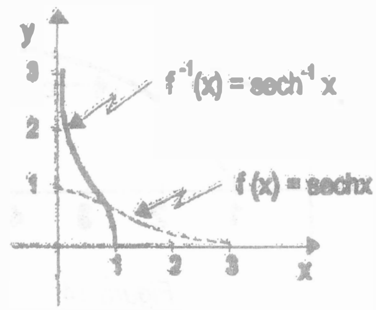


Figura 17

$$D_f = [0,\infty) = R_{f^{-1}}; \qquad R_f = (0,1] = D_{f^{-1}}$$

FUNCIÓN COSECANTE HIPERBÓLICA INVERSA. $f^{-1}(x) = \text{csch}^{-1}\, x$

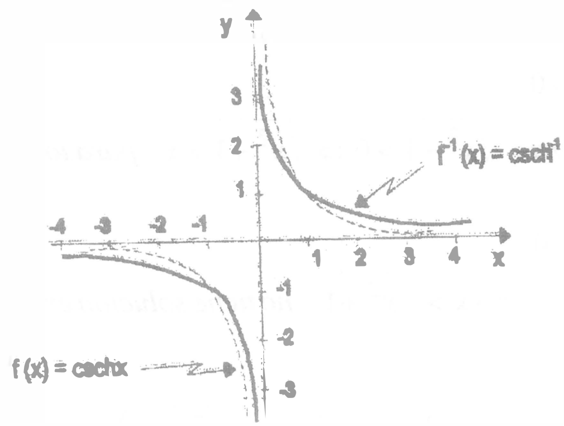


Figura 18

$$D_f = \Re - \{0\} = R_{f^{-1}}; \qquad R_f = \Re - \{0\} = D_{f^{-1}}$$

***EJEMPLO 1**. Si las funciones hiperbólicas están en términos de la función exponencial, y ésta es función inversa de la función logaritmo natural, encontrar expresiones para las funciones hiperbólicas inversas:*

$$\text{senh}^{-1} x, \ \cosh^{-1} x \ \text{ y } \ \tanh^{-1} x,$$

en términos de la función logaritmo natural.

Solución. i) Función seno hiperbólico inversa. Como se sabe del estudio en el Cálculo de las funciones inversas, es posible partir de la doble implicación:

$$y = \text{senh}^{-1} x \quad \text{sí y sólo si} \quad x = \text{senh}\, y$$

de donde

$$x = \text{senh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y}$$

se multiplica por e^y y se tiene que

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

luego

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y = \ln\left| x \pm \sqrt{x^2 + 1} \right|$$

por lo que

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2+1}\right|$$

como $e^y > 0$, entonces

$$x \pm \sqrt{x^2+1} > 0 \qquad para\ toda\ x \in \Re$$

$1_{er}\ Caso: x + \sqrt{x^2+1} > 0$

$$como\ \sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > x;\ para\ todo\ x \in \Re$$

$2o.Caso: x - \sqrt{x^2+1} > 0$

$$\Rightarrow x > \sqrt{x^2+1} \quad no\ tiene\ solución\ en\ \Re$$

por lo tanto

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right); \quad x \in \Re$$

ii) Función coseno hiperbólico inversa. Igual que en el caso anterior, se parte de

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{sí y sólo si} \quad x = \cosh y$$

de donde

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y + e^{-y}$$

se multiplica por e^y y se tiene que

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

luego

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow y = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right|$$

por lo que

$$\cosh^{-1} x = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right|$$

como $e^y > 0$, entonces

$$x \pm \sqrt{x^2-1} > 0$$

El dominio de la función $\sqrt{x^2-1}$ es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, luego

$1\,er\ .Caso: x + \sqrt{x^2-1} > 0$

x ε (- ∞, - 1] ⇒ no hay solución

x ε [1, ∞) ⇒ sí hay solución

$$2o.Caso \quad : x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$$

x ∈ (- ∞, - 1] ⇒ no hay solución

x ∈ [1, ∞) ⇒ sí hay solución

Se elige el primer caso para que cosh^{-1} x sea función y así ser congruentes con el dominio definido para la función cosh x elegido para hacerla inyectiva. Por lo tanto

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right); \quad x \in [1, \infty)$$

iii) Función tangente hiperbólica inversa. Se parte de que

$$y = \tanh^{-1} x \quad \text{sí y sólo si} \quad x = \tanh y$$

de donde

$$x = tanhy = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y}$$

se multiplica por e^y y se tiene que

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1; \qquad 1 + x = e^{2y}(1 - x) \Rightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|$$

$$Como \quad e^{2y} > 0 \Rightarrow \frac{1 + x}{1 - x} > 0, \quad lo\ que\ se\ cumple \quad para \quad x \in (-1, 1)$$

y por lo tanto

$$tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right); \quad x \in (-1, 1)$$

De manera semejante se podrían determinar expresiones para coth^{-1} x, sech^{-1} x y csch^{-1} x, en términos de la función logaritmo natural. Estas ecuaciones son:

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right); \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$\sec h^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}\right);\quad x\in(0,1]$$

$$\operatorname{csc} h^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\right);\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS DIRECTAS E INVERSAS

Si se utilizan las fórmulas de derivación para las funciones logarítmicas y exponenciales, ya que las funciones hiperbólicas –directas e inversas- están en función de ellas, se tiene que:

Funciones hiperbólicas directas:

f(x) = senh u ; u = g(x)

$$y = \operatorname{senh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \cosh u$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

f(x) = cosh u ; u = g(x)

$$y = \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \operatorname{senh} u$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$$

f(x) = tanh u ; u = g(x)

$$y = tanhu = \frac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{\left(e^{u} + e^{-u}\right)\left(e^{u} + e^{-u}\right) - \left(e^{u} - e^{-u}\right)\left(e^{u} - e^{-u}\right)}{\left(e^{u} + e^{-u}\right)^{2}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{e^{2u} + 2 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}}{\left(e^{u} + e^{-u}\right)^{2}} = \frac{4}{\left(e^{u} + e^{-u}\right)^{2}} = \left(\frac{2}{e^{u} + e^{-u}}\right)^{2} = \sec h^{2} u$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = \sec h^{2} u \frac{du}{dx}$$

f(x) = coth u ;   u = g(x)

$$y = \coth u = \frac{1}{tanhu} \Rightarrow \frac{dy}{du} = -\frac{\sec h^{2} u}{tanh^{2} u} = -\frac{1}{\operatorname{senh}^{2} u} = -\csc h^{2} u$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = -\csc h^{2} u \frac{du}{dx}$$

f(x) = sech u ;   u = g(x)

$$y = \sec hu = \frac{1}{\cosh u} \Rightarrow \frac{dy}{du} = -\frac{\operatorname{senh} u}{\cosh^{2} u} = -\sec hu .tanhu$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = -\sec hutanhu \frac{du}{dx}$$

f(x) =csch u ;   u = g(x)

$$y = \csc hu = \frac{1}{\operatorname{senh} u} \Rightarrow \frac{dy}{du} = -\frac{\cosh u}{\operatorname{senh}^{2} u} = -\csc hu \coth u$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = -\csc hu \coth u \frac{du}{dx}$$

Funciones hiperbólicas inversas:

f(x) = senh⁻¹ u ; u = g(x)

$$y = \operatorname{senh}^{-1} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1 + \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}}{u + \sqrt{u^2+1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{u^2+u}+u}{\sqrt{u^2+1}}}{u+\sqrt{u^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx}$$

f(x) = cosh⁻¹ u ; u = g(x)

$$y = \cosh^{-1} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1 + \dfrac{u}{\sqrt{u^2-1}}}{u + \sqrt{u^2-1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{u^2-1}+u}{\sqrt{u^2-1}}}{u+\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$$

y, por la regla de la cadena,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}; \quad u > 1$$

f(x) = tanh⁻¹ u ; u = g(x)

$$y = tanh^{-1}u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{(1-u)(1)-(1+u)(-1)}{(1-u)^2}}{\dfrac{1+u}{1-u}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-u+1+u}{1-u^2} = \frac{1}{1-u^2}$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}; \quad |u| < 1$$

f(x) = coth⁻¹ u ; u = g(x)

$$y = \coth^{-1} u = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{u+1}{u-1} \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{(u-1)(1)-(u+1)(1)}{(u-1)^2}}{\frac{u+1}{u-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u-1-u-1}{u^2-1} = \frac{1}{1-u^2}$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}; \quad |u| > 1$$

f(x) = sech⁻¹ u ; u = g(x)

$$y = \sec h^{-1} u = \ln\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\right) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{-\frac{1}{u^2} + \frac{\frac{u^2(-2u)-(1-u^2)(2u)}{(u^2)^2}}{2\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}}}{\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{\frac{-2u^2\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} + \left(-2u^3 - 2u + 2u^3\right)}{u^4}}{2\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\right)} = \frac{-2u^2\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} - 2u}{2u^4\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\right)}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{-2u\left(\sqrt{1-u^2} + 1\right)}{2u^2\sqrt{1-u^2}\left(1 + \sqrt{1-u^2}\right)} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}; \quad 0 < u < 1$$

f(x) = csch⁻¹ u ; u = g(x)

$$y = \csc h^{-1} u = \ln\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}\right) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{-\frac{1}{u^2} + \frac{\frac{u^2(2u)-(1+u^2)(2u)}{(u^2)^2}}{2\sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}}}{\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{\frac{-2u^2\sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}} + (2u^3 - 2u - 2u^3)}{u^4}}{2\sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}\right)} = \frac{-2u^2\sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}}{2u^4\sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}\right)}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{-2u\left(\sqrt{1+u^2}+1\right)}{2u^2\sqrt{1+u^2}\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}$$

y, por la regla de la cadena,

$$f'(x) = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}; \quad u \neq 0$$

EJEMPLO 2. *Obtener las derivadas de las siguientes funciones:*

$i) f(x) = \operatorname{senh}^2(1-2x^2)$; $\quad ii) f(x) = \cosh(\ln\sqrt{x})$; $\quad iii) y = ang\ \cot(\operatorname{senh} 3x)$

$iv) y = (\operatorname{senh} x).e^{\cosh x}$; $\quad v) y = \dfrac{\cosh x}{4 + \operatorname{senh}^2 x}$; $\quad vi) y = \ln\left[tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$

$vii) y = angtan(tanhx)$; $\quad viii) f(x) = x^{\coth x}$; $\quad ix) y = \ln(\sec h4x)$

$$x)\, f(x) = \ln\left(\sec h\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\csc h\frac{1}{x}\right)$$

Solución. $i)\, f(x) = \operatorname{senh}^2(1-2x^2)$

$$f'(x) = 2\operatorname{senh}(1-2x^2)\cosh(1-2x^2)\cdot(-4x) = -4x\operatorname{senh}(2-4x^2)$$

$$ii)\, f(x) = \cosh(\ln\sqrt{x})$$

$$f'(x) = \operatorname{senh}(\ln\sqrt{x})\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}\operatorname{senh}(\ln\sqrt{x})$$

$$iii)\, y = ang\ \cot(\operatorname{senh} 3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cosh 3x}{1+\operatorname{senh}^2 3x} = -\frac{3\cosh 3x}{\cosh^2 3x} = \frac{-3}{\cosh 3x} = -3\sec h3x$$

$$iv)\, y = (\operatorname{senh} x)e^{\cosh x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{senh} x)(\operatorname{senh} x)e^{\cosh x} + (\cosh x)e^{\cosh x} = e^{\cosh x}(\operatorname{senh}^2 x + \cosh x)$$

$$v)\, y = \frac{\cosh x}{4+\operatorname{senh}^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4+\operatorname{senh}^2 x)\operatorname{senh} x - \cosh x(2\operatorname{senh} x\cosh x)}{(4+\operatorname{senh}^2 x)^2} = \frac{\operatorname{senh} x(4+\operatorname{senh}^2 x - 2\cosh^2 x)}{(4+\operatorname{senh}^2 x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{senh} x\left[4-\cosh^2 x - (\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x)\right]}{(4+\operatorname{senh}^2 x)^2} = \frac{\operatorname{senh} x(3-\cosh^2 x)}{(4+\operatorname{senh}^2 x)^2}$$

$$vi)\ y = \ln\left[tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\sec h^2\left(\frac{x}{2}\right)}{tanh\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\dfrac{1}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{2\cdot\dfrac{\text{senh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{2\,\text{senh}\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\text{senh}\ 2\left(\frac{x}{2}\right)} = \csc\ hx$$

$$vii)\ y = angtan\,(tanhx)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec h^2 x}{1+tanh^2 x} = \frac{\dfrac{1}{\cosh^2 x}}{\dfrac{\cosh^2 x + \text{senh}^2 x}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{\cosh^2 x + \text{senh}^2 x} = \frac{1}{\cosh 2x} = \sec h2x$$

$$viii)\ f(x) = x^{\coth\ x}$$

$$f'(x) = \coth x\cdot x^{\coth x-1} + x^{\coth x}\ln x\left(-\csc h^2 x\right) = x^{\coth x}\left[\frac{\coth x}{x} - \ln x\left(\csc h^2 x\right)\right]$$

$$ix)\ y = x\ln\left(\sec\ h4x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{-4\sec\ h4xtanh\ 4x}{\sec\ h4x} + \ln\left(\sec\ h4x\right) = -4xtanh\ 4x + \ln\left(\sec\ h4x\right)$$

$$x)\ f(x) = \ln\left(\sec\ h\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\csc\ h\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}\left(-\sec h\frac{1}{x}\,tanh\ \frac{1}{x}\right)}{\sec h\frac{1}{x}} + \frac{-\frac{1}{x^2}\left(-\csc h\frac{1}{x}\coth\ \frac{1}{x}\right)}{\csc h\frac{1}{x}} = \frac{tanh\ \frac{1}{x}}{x^2} + \frac{\coth\ \frac{1}{x}}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\operatorname{senh}\frac{1}{x}}{\cosh\frac{1}{x}}+\dfrac{\cosh\frac{1}{x}}{\operatorname{senh}\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{\operatorname{senh}^2\frac{1}{x}+\cosh^2\frac{1}{x}}{x^2\operatorname{senh}\frac{1}{x}\cosh\frac{1}{x}}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2\cosh\frac{2}{x}}{x^2\operatorname{senh}\frac{2}{x}}=\frac{2}{x^2}\coth\frac{2}{x}$$

EJEMPLO 3. *Obtener la derivada de las siguientes funciones:*

$i)\,y=\sqrt{x}\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x};\quad ii)\,f(x)=x\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{4+x^2};\quad iii)\,y=\cosh^{-1}x^2$

$iv)\,y=tanh^{-1}(\cos x);\quad v)\,f(x)=xtanh^{-1}x+\ln\sqrt{1-x^2};\quad vi)\,y=\coth^{-1}\sqrt{x^2+1}$

$vii)\,y=\coth^{-1}(\operatorname{sen}2x);\quad viii)\,f(x)=\sec h^{-1}(\cos 2x);\quad ix)\,f(x)=\csc h^{-1}(tanx)$

$x)\,tan^{-1}y=tanh^{-1}x$

Solución: $i)\,y=\sqrt{x}\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x}$$

$ii)\,f(x)=x\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{4+x^2}$

$$f'(x)=x\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}}+\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$iii)\,y=\cosh^{-1}x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$$

$$iv)\, y = tanh^{-1}(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc x$$

$$v)\, f(x) = x tanh^{-1} x + \ln\sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{1-x^2} + tanh^{-1} x + \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-x^2} + tanh^{-1} x - \frac{x}{1-x^2} = tanh^{-1} x$$

$$vi)\, y = \coth^{-1}\sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1-(x^2+1)} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$vii)\, y = \coth^{-1}(\operatorname{sen} 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2x}{1-\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{2}{\cos 2x} = 2\sec 2x$$

$$viii)\, f(x) = \sec h^{-1}(\cos 2x)$$

$$f'(x) = \frac{-(-2\operatorname{sen} 2x)}{\cos 2x\sqrt{1-\cos^2 2x}} = \frac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x \cdot \operatorname{sen} 2x} = \frac{2}{\cos 2x} = 2\sec 2x$$

$$ix)\, f(x) = \csc h^{-1}(tanx)$$

$$f'(x) = \frac{-\sec^2 x}{|tanx|\sqrt{1+tan^2 x}} = \frac{-\sec^2 x}{|tanx|\sec x} = \frac{-\frac{1}{\cos x}}{\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right|} = -|\csc x|$$

$$x)\tan^{-1} y = \tanh^{-1} x$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{1+y^2} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1-x^2}$$

INTEGRACIÓN DE Y CON LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Cada una de las expresiones obtenidas para derivar las funciones hiperbólicas directas e inversas, tiene su correspondiente forma diferencial y, de estas diferenciales, al integrarlas, se obtienen las expresiones siguientes:

$$\int \operatorname{senh} u du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int tan u du = \ln(\cosh u) + C$$

$$\int \coth u du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$$

$$\int \sec u du = angtan|\operatorname{senh} u| + C$$

$$\int \csc hu du = \ln\left|tanh \frac{u}{2}\right| + C$$

$$\int \sec h^2 u du = tanh u + C$$

$$\int \csc h^2 u du = -\coth u + C$$

$$\int \sec hu \tanh u du = -\sec hu + C$$

$$\int \csc hu \coth u du = -\csc hu + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C; \quad u > a$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+u}{a-u} + C; \quad |u| < a$$

$$= \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{u+a}{u-a} + C; \quad |u| > a$$

y en forma compacta

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C; \quad u \neq a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\sec h^{-1}\frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{|u|} + C; \quad 0 < u < a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\csc h^{-1}\frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{senh}^{-1}\frac{a}{|u|} + C; \quad u \neq 0$$

***EJEMPLO 4**. Resolver las siguientes integrales:*

$i)\ \int \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;\quad ii)\ \int_0^1 \cosh^2 2x dx;\quad iii)\ \int_1^2 \tanh^2 x dx;\quad iv)\ \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}dx$

$v)\ \int \sec h^2 5x dx;\quad vi)\ \int \frac{\csc h(\ln x)}{x}dx;\quad vii)\ \int \cosh^3 x dx;\quad viii)\ \int \cosh x \csc h^2 x dx$

$ix)\ \int \frac{\sec h\left(\frac{1}{x}\right)\tanh\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx;\quad x)\ \int \operatorname{senh}^4 x\ dx$

Solución. $\quad i)\ \int \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$$u = \sqrt{x};\quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{2}\int \operatorname{senh} u du = \frac{1}{2}\cosh u + C = \frac{1}{2}\cosh\sqrt{x} + C$$

$ii)\ \int_0^1 \cosh^2 2x dx$

$$u = 2x;\quad du = 2dx \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{2}\int \cosh^2 u du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2u\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\int du + \frac{1}{4}\int \cosh 2u du;\quad v = 2u;\quad dv = 2du \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{4}\int du + \frac{1}{8}\int \cosh v dv$$

$$= \frac{u}{4} + \frac{\operatorname{senh} v}{8} + C = \frac{2x}{4} + \frac{\operatorname{senh} 4x}{8} + C = \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{senh} 4x}{8}\right]_0^1 \approx 3.9112$$

$iii)\ \int_1^2 \tanh^2 x dx$

$$= \int_1^2 \left(1 - \sec h^2 x\right) dx = \left[x - tanhx\right]_1^2 \approx 0.7976$$

$$iv) \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

$$= \int \coth x dx = \ln\left|\text{senh } x\right| + C$$

$$v) \int \sec h^2 5x dx$$

$$u = 5x; \quad du = 5dx \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{5} \int \sec h^2 du = \frac{1}{5} tanhu + C = \frac{1}{5} tanh 5x + C$$

$$vi) \int \frac{\csc h(\ln x)}{x} dx$$

$$u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad = \int \csc hudu = \ln\left|tanh \frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|tanh \frac{\ln x}{2}\right| + C$$

$$vii) \int \cosh^3 x dx$$

$$= \int \cosh^2 x \cosh x dx = \int \left(1 + \text{senh}^2 x\right) \cosh x dx = \int \cosh x dx + \int \text{senh}^2 x \cosh x dx$$

$$u = \text{senh } x; \quad du = \cosh x dx \quad \Rightarrow \quad = \int du + \int u^2 du = u + \frac{u^3}{3} + C = \text{senh } x + \frac{\text{senh}^3 x}{3} + C$$

$$viii)\ \int \cosh x \operatorname{csc} h^2 x dx$$

$$= \int \cosh x \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} dx = \int \operatorname{csc} hx \coth x dx = -\operatorname{csc} hx + C$$

$$ix)\ \int \frac{\sec h\left(\frac{1}{x}\right) \tanh\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

$$u = \frac{1}{x};\quad du = -\frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad = -\int \sec hu \tanh u du \quad = \sec hu + C = \sec h\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

$$x)\ \int \operatorname{senh}^4 x\ dx$$

$$= \int \left(\operatorname{senh}^2 x\right)^2 dx = \int \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cosh 2x dx + \frac{1}{4}\int \cosh^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cosh 2x dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 4x\right) dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cosh 2x dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cosh 4x dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{senh} 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{senh} 4x}{32} + C = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{senh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{senh} 4x}{32} + C$$

EJEMPLO 5*. Resolver las siguientes integrales, en términos de las funciones hiperbólicas inversas:*

$$i)\ \int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^4 + 16}} dx;\qquad ii)\ \int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - 9}} dx;\qquad iii)\ \int_1^2 \frac{dx}{3 + 2x - x^2};\qquad iv)\ \int \frac{dx}{25 - 4x^2}$$

$v)\int_{0.2}^{0.8}\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$; $vi)\int\frac{dx}{\sqrt{4+e^{2x}}}$; $vii)\int \text{senh}^{-1}xdx$; $viii)\int xtanh^{-1}xdx$

$ix)\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$; $x)\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

Solución. $i)\int_3^4\frac{x}{\sqrt{x^4+16}}dx$

La integral definida se resuelve como sigue:

$u^2=x^4;\quad u=x^2;\quad du=2xdx;\quad a^2=16;\quad a=4$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{1}{2}\text{senh}^{-1}\frac{u}{a}+C$$

luego, la integral definida es:

$$\left[\frac{1}{2}\text{senh}^{-1}\frac{x^2}{4}\right]_3^4\approx 0.2723$$

$$ii)\int\frac{\cos x}{\sqrt{\text{sen}^2x-9}}dx$$

$u^2=\text{sen}^2x,\quad u=\text{sen}\,x,\quad du=\cos xdx,\quad a^2=4,\quad a=2$

$$=\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{u}{a}+C=\cosh^{-1}\frac{\text{sen}\,x}{3}+C$$

$$iii)\int_1^2\frac{dx}{3+2x-x^2}$$

la integral indefinida y sus solución están dadas por:

$$= \int \frac{dx}{-\left(x^2 - 2x - 3\right)} = \int \frac{dx}{-\left(x^2 - 2x + 1 - 1 - 3\right)} = \int \frac{dx}{4 - (x - 1)^2}$$

$$u^2 = (x - 1)^2; \quad u = x - 1; \quad du = dx; \quad a^2 = 4; \quad a = 2$$

$$= \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C = \frac{1}{2} \tanh^{-1} \frac{x - 1}{2} + C$$

luego, la integral definida es igual a:

$$\left[\frac{1}{2} \tanh^{-1} \frac{x - 1}{2} \right]_1^2 \approx 0.2747$$

$$iv) \int \frac{dx}{25 - 4x^2}$$

$$u^2 = 4x^2; \quad u = 2x; \quad du = 2dx; \quad a^2 = 25; \quad a = 5$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C = \frac{1}{10} \coth^{-1} \frac{2x}{5} + C$$

$$v) \int_{0.2}^{0.8} \frac{dx}{x \sqrt{1 - x}}$$

la integral indefinida se resuelve como:

$$u^2 = x; \quad u = \sqrt{x}; \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad a^2 = 1; \quad a = 1$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} = 2 \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \sec h^{-1} \frac{|u|}{a} + C$$

y entonces la integral definida es igual a:

$$-\left[\sec h^{-1} \sqrt{x}\right]_{0.2}^{0.8} \approx 1.5993$$

$$vi)\int \frac{dx}{\sqrt{4+e^{2x}}}$$

$$u^2 = e^{2x};\quad u = e^x;\quad du = e^x dx;\quad a^2 = 4;\quad a = 2$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4+e^{2x}}}\cdot\frac{e^x}{e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x\sqrt{4+e^{2x}}} = \int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csc}h^{-1}\frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{2}\operatorname{csc}h^{-1}\frac{e^x}{2} + C$$

$$vii)\int \operatorname{senh}^{-1} x \; dx$$

se integra por partes y

$$u = \operatorname{senh}^{-1} x;\quad du = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};\quad dv = dx;\quad v = x$$

$$= x\operatorname{senh}^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\operatorname{senh}^{-1} x - \sqrt{x^2+1} + C$$

$$viii)\int x\tanh^{-1} x \; dx$$

se integra por partes y

$$u = \tanh^{-1} x;\quad du = \frac{dx}{1-x^2};\quad dv = xdx;\quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\tanh^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = \frac{x^2}{2}\tanh^{-1}x + \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\tanh^{-1}x + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\tanh^{-1}x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\tanh^{-1}x + C = \frac{x}{2} + \left(\frac{x^2-1}{2}\right)\tanh^{-1}x + C$$

$$ix)\int x^2\sqrt{x^2-1}\;dx$$

se hace el cambio de variable: $x = \cosh u;\quad dx = \operatorname{senh} u du$

$$= \int \cosh^2 u \sqrt{\cosh^2 u - 1}\ \text{senh}\ u du = \int \cosh^2 u\ \text{senh}^2 u du$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2u\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2u\right) du = \int \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cosh^2 2u\right) du$$

$$= -\frac{1}{4}\int du + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 4u\right) du = -\frac{1}{4}\int du + \frac{1}{8}\int du + \frac{1}{8}\int \cosh 4u du$$

$$= -\frac{u}{4} + \frac{u}{8} + \frac{\text{senh}\ 4u}{32} + C = -\frac{u}{8} + \frac{\text{senh}\ 2u \cosh 2u}{16} + C = -\frac{u}{8} + \frac{\text{senh}\ u \cosh u\left(\cosh^2 u + \text{senh}^2 u\right)}{8} + C$$

$$= -\frac{u}{8} + \frac{\text{senh}\ u \cosh^3 u}{8} + \frac{\text{senh}^3 u \cosh u}{8} + C = -\frac{\cosh^{-1} u}{8} + \frac{x^3\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{x\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{8} + C$$

$$x)\ \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + .2x + 2}}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1 + 2}} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)^2 + 1}}$$

primera sustitución: *u =x + 1; du =dx* $\Rightarrow$ $= \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 + 1}}$

segunda sustitución*:* *u = senhv; du = coshvdv*

$$= \int \frac{\cosh v dv}{\text{senh}^2 v \sqrt{\text{senh}^2 v + 1}} = \int \frac{\cosh v dv}{\text{senh}^2 v \cosh v} = \int \frac{dv}{\text{senh}^2 v} = \int \csc h^2 v dv = -\coth v + C$$

$$= -\frac{\sqrt{\text{senh}^2 v + 1}}{\text{senh}\ v} + C = -\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u} + C = -\frac{\sqrt{(x+1)^2 + 1}}{x+1} + C = -\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1} + C$$

APLICACIONES

Ahora se presentarán algunos ejemplos de aplicación que ilustran la utilización de este importante tipo de funciones, en las matemáticas y la física.

EJEMPLO 6*. Al colgar un cable telefónico (uniforme y flexible) entre dos puntos, adopta la forma de una catenaria cuya ecuación está dada por* $f(x) = 5\cosh\frac{x}{5}$. *Determinar la longitud del cable, de acuerdo con la figura, entre las abscisas x = 0 y x = 10 m.*

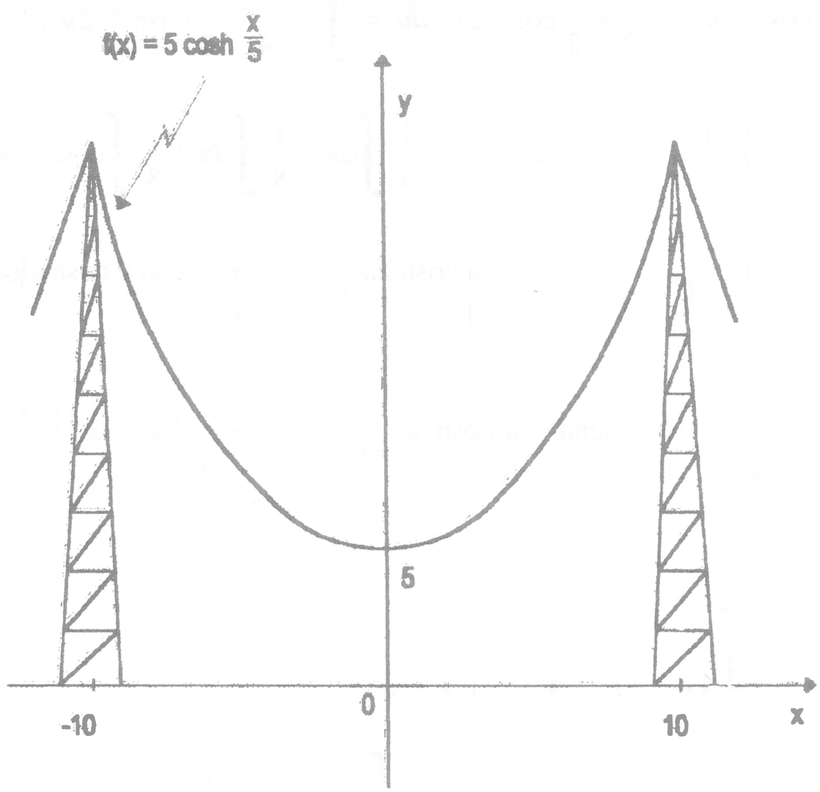


Figura 19

Solución. Como se sabe, la expresión para calcular la longitud está dada por:

$$L = \int_0^{10} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$f(x) = 5\cosh\frac{x}{5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \operatorname{senh}\frac{x}{5}$$

$$L = \int_0^{10} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\frac{x}{5}}\, dx = \int_0^{10} \cosh\frac{x}{5}\, dx = \left[5\operatorname{senh}\frac{x}{5}\right]_0^{10} \approx 18.1343 \quad m$$

***EJEMPLO 7**. En la Ciudad de San Luis Missouri, EUA, se construyó un arco que posee la forma de una catenaria invertida. En el centro tiene 192 m de altura y de extremo a extremo en la base, hay una longitud de 192.28 m. La forma del arco obedece, en forma aproximada, a la curva de ecuación*

$$y = 231 - 39 \cosh\left(\frac{x}{39}\right)$$

i) *Determinar la longitud total del arco.*

ii) *Determinar el área total bajo el arco.*

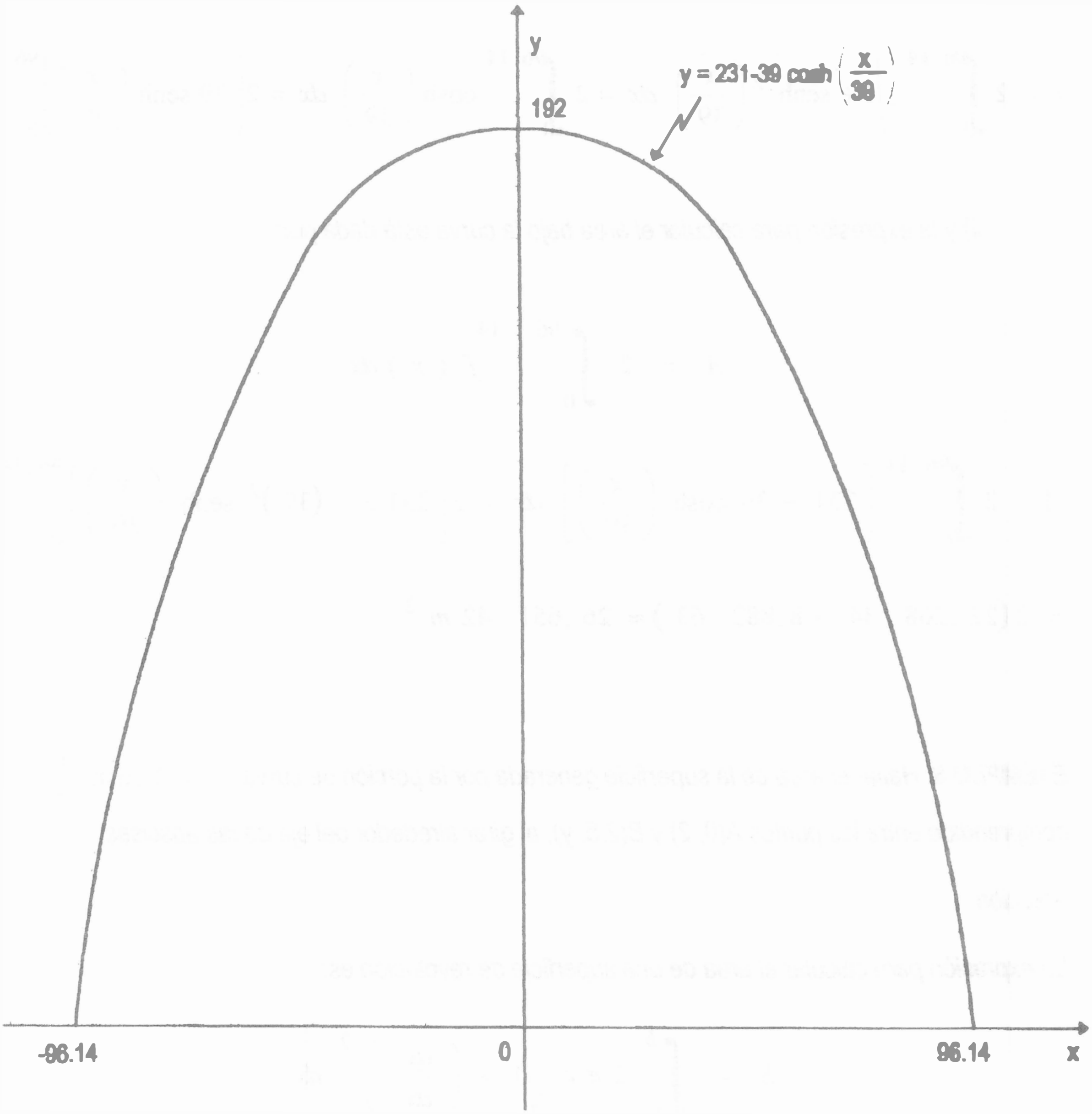


Figura 20

Solución. i) La expresión para calcular la longitud del arco es:

$$L = 2\int_0^{96.14} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$f(x) = 231 - 39\cosh\left(\frac{x}{39}\right) \ldots \Rightarrow \ldots f'(x) = -\operatorname{senh}\left(\frac{x}{39}\right)$$

$$L = 2\int_0^{96.14} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{39}\right)}\, dx = 2\int_0^{96.14} \cosh\left(\frac{x}{39}\right) dx = 2\left[39\operatorname{senh}\left(\frac{x}{39}\right)\right]_0^{96.14} \approx 455.5$$

ii) y la expresión para calcular el área bajo la curva está dada por:

$$A = 2\int_0^{96.14} f(x)\, dx$$

$$A = 2\int_0^{96.14} \left[231 - 39\cosh\left(\frac{x}{39}\right)\right] dx = 2\left[231x - (39)^2 \operatorname{senh}\left(\frac{x}{39}\right)\right]_0^{96.14}$$

$$= 2(22{,}208.34 - 8{,}882.63) \approx 26{,}651.42\ m^2$$

***EJEMPLO 8**. Hallar el área de la superficie generada por la porción de curva* $y = 2\cosh\frac{x}{2}$, *comprendida entre los puntos A(0, 2) y B(2.5, y), al girar alrededor del eje de las abscisas.*

Solución.

La expresión para calcular el área de una superficie de revolución es:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$y = 2\cosh\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{x}{2}$$

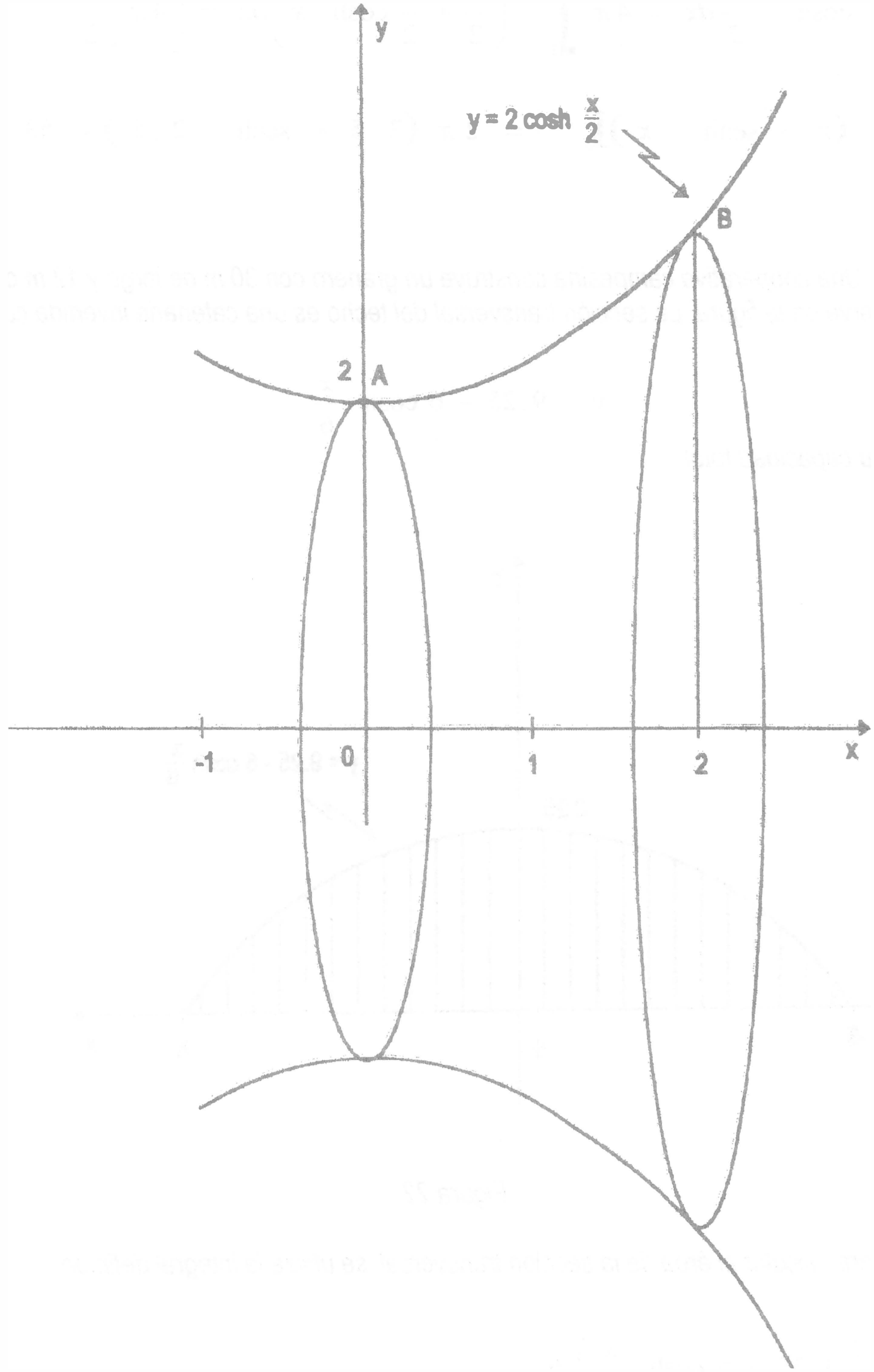


Figura 21

$$S = \int_0^{2.5} 2\pi\left(2\cosh\frac{x}{2}\right)\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\frac{x}{2}}\,dx = 2\pi\int_0^{2.5}\left(2\cosh\frac{x}{2}\right)\left(\cosh\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= 4\pi\int_0^{2.5}\cosh^2\frac{x}{2}\,dx = 4\pi\int_0^{2.5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cosh x\right)dx = \left[4\pi\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{senh} x}{2}\right)\right]_0^{2.5}$$

$$S = \left[2\pi\left(x+\operatorname{senh} x\right)\right]_0^{2.5} = 2\pi\left(2.5+\operatorname{senh} 2.5\right) \approx 53.723\ u^2$$

***EJEMPLO 9**. Una cooperativa campesina construye un granero con 30 m de largo y 12 m de ancho, como se observa en la figura. La sección transversal del techo es una catenaria invertida cuya ecuación es:*

$$y = 9.25 - 6\cosh\frac{x}{6}$$

Determinar su capacidad total.

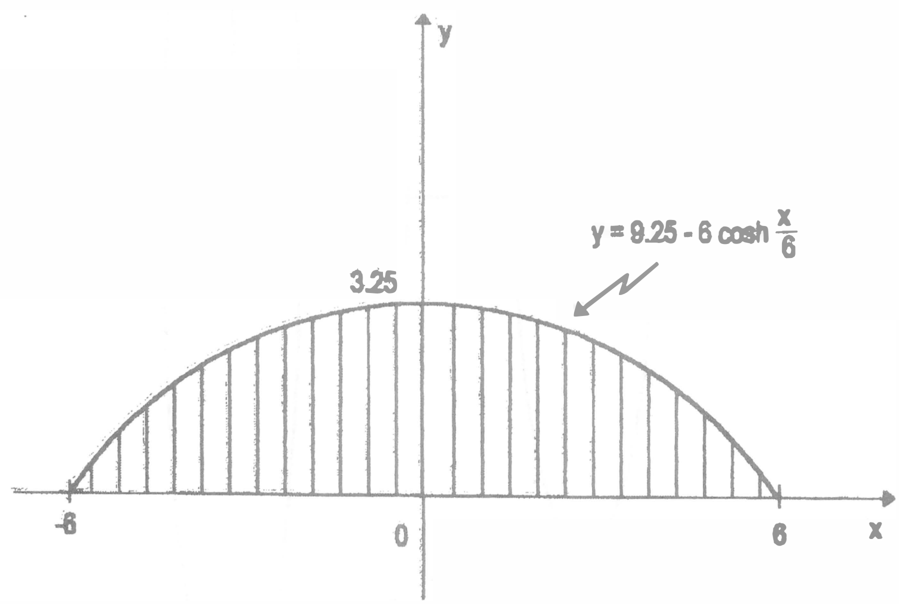


Figura 22

Solución. Para calcular el área de la sección transversal, se utiliza la integral definida

$$A = 2\int_0^{6}\left(9.25 - 6\cosh\frac{x}{6}\right)dx$$

la integral indefinida se resuelve como:

$$\int\left(9.25 - 6\cosh\frac{x}{6}\right)dx = 9.25\int dx - 6\int\cosh\frac{x}{6}dx = 9.25x - 36\,\text{senh}\,\frac{x}{6} + C$$

y el área de la sección es igual a: $A = \left[9.25x - 36\,\text{senh}\,\frac{x}{6}\right]_0^6 = 55.5 - 42.3072 = 13.1928m^2$

y el volumen será: $13.1928 \cdot 30 \approx 395.784\ m^3$

EJEMPLO 10*. Una región del primer cuadrante está acotada arriba por la curva y = cosh x, abajo por la curva y = senh x y por la izquierda y la derecha, por el eje y y la recta x = 2 respectivamente. Calcular el volumen que se genera al hacer girar esta región alrededor del eje x.*

Solución. La figura del área que gira alrededor del eje x y genera el volumen es la siguiente:

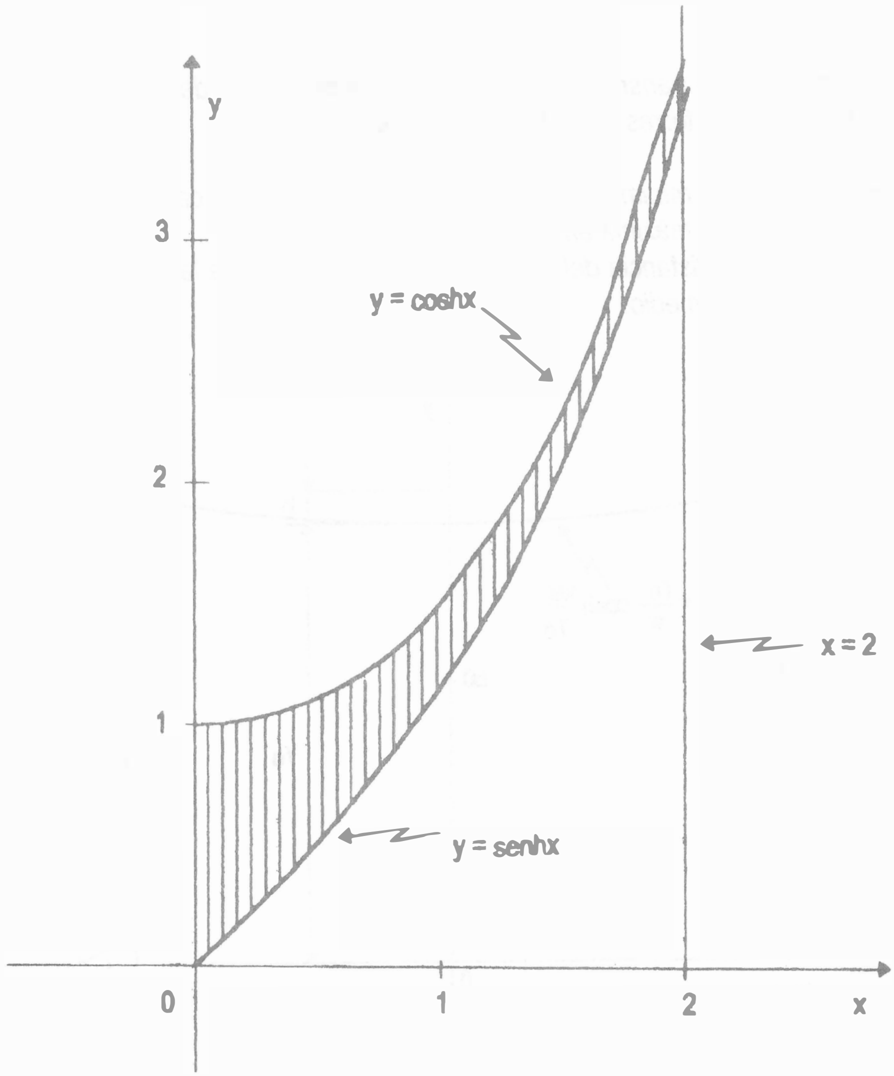


Figura 23

La integral definida para determinar el volumen requerido es:

$$V = \pi \int_0^2 \left[\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x \right] dx$$

la integral indefinida se resuelve de la siguiente manera:

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2x \right) dx - \int \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2x \right) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cosh 2x dx + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cosh 2x dx$$

$$= \int dx = x + C$$

luego el volumen será igual a: $V = \pi \left[x \right]_0^2 = 2 \pi u^3$

EJEMPLO 11*. Una línea de transmisión de alto voltaje mide 62.5 m de longitud y tiene un peso de 1.488 kg / m. Cuelga de dos torres con 61 m de separación.*

i) *Encontrar la tensión mínima* T_0 *(tensión horizontal que tira del cable en su punto más bajo).*
ii) *Encontrar la tensión máxima en la línea de transmisión.*
iii) *Calcular la flecha (distancia del punto más bajo de la línea, a la horizontal que une sus dos soportes) del punto medio.*

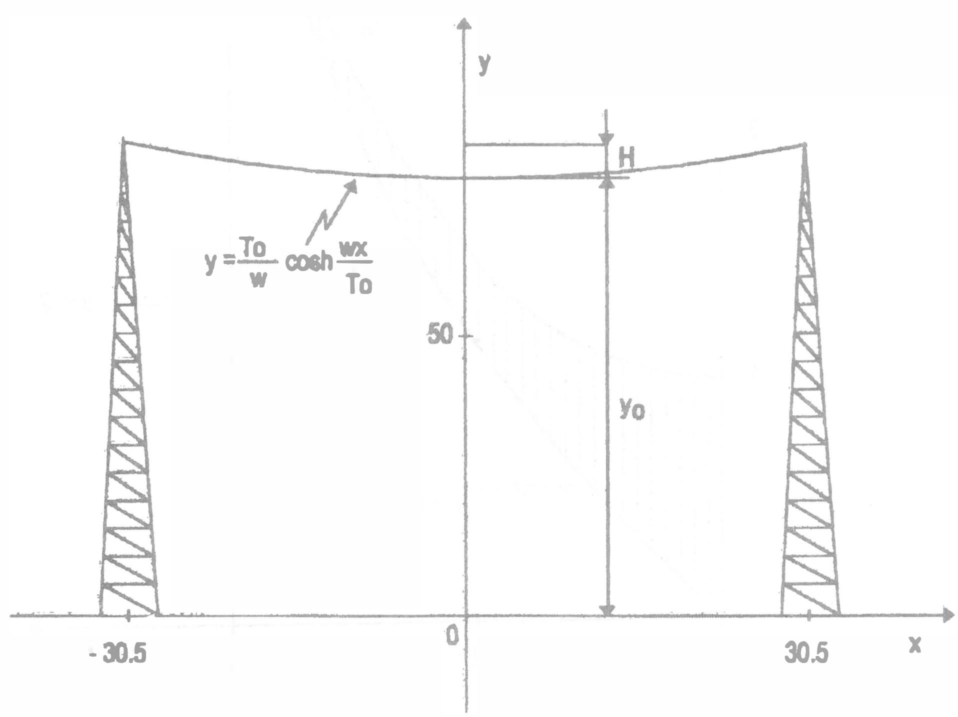


Figura 24

Solución.

i)Como ya se vio en este trabajo, la ecuación cartesiana de la catenaria está dada por y = cosh x o bien, por

$$y = c\cosh\frac{x}{c} \quad donde \quad c = \frac{T_0}{w} \quad \Rightarrow y = \frac{T_0}{w}\cosh\frac{wx}{T_0}$$

La longitud "l" de un segmento [0, x] de la catenaria se obtiene a partir del siguiente desarrollo:

$$l = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+\text{senh}^2\frac{wx}{T_0}}\,dx = \int_0^x \cosh\frac{wx}{T_0}\,dx = \left[\frac{T_0}{w}\,\text{senh}\,\frac{wx}{T_0}\right]_0^x$$

$$l = \frac{T_0}{w}\,\text{senh}\,\frac{wx}{T_0}$$

Como l = 31.25 m; x = 30.5 m; w = 1.488 kg / m, entonces se tiene que:

$$31.25 = \frac{T_0}{1.488}\,\text{senh}\,\frac{1.488\,x30.5}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{46.5}{T_0} = \text{senh}\,\frac{45.384}{T_0}$$

se hace

$$u = \frac{45.384}{T_0} \quad \Rightarrow \quad 1.02459u = \text{senh}\,u \quad \Rightarrow \quad \text{senh}\,u - 1.02459u = 0$$

y el valor de u que hace cero la ecuación anterior es aproximadamente: u = 0.3859. Luego se llega a

$$T_0 = \frac{45.384}{0.3859} \approx 117.61\ kg$$

iii) Para encontrar la tensión máxima en la línea de transmisión "T", se aplica el teorema de Pitágoras y

$$T = \sqrt{T_0^{\,2} + (wl)^2} = \sqrt{(117.61)^2 + (1.488\cdot 31.25)^2} = \sqrt{13832.1121 + 2162.25} \approx 126.47\,kg$$

iii Para calcular le flecha del punto medio, indicada en la figura con "H", se hace lo siguiente:

$$y = \frac{T_0}{w} \cosh \frac{wx}{T_0}$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{T_0}{w} = \frac{117.61}{1.488} = 79.03898$$

$$x = 30.5 \quad \Rightarrow \quad y = 79.03898 \cdot \cosh \frac{30.5}{79.03898} = 84.987$$

de donde

$$H = y - y_0 \approx 5.96\ m$$

EJEMPLO 12*. Mediante los principios de la estática es factible probar que cuando se cuelga un cable entre dos postes, su forma es la de la curva*

$$y = \frac{T}{\rho g} \cosh \left(\frac{\rho g x}{T} \right)$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, T la tensión del mismo en su punto más bajo y g es la acelaración de la gravedad. Comprobar que dicha ecuación satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Solución. Se deriva la fución "y" dada y se sustituye en la ecuación diferencial donde se ve que la satisface.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T}{\rho g} \cdot \frac{\rho g}{T} \operatorname{senh} \left(\frac{\rho g x}{T} \right) = \operatorname{senh} \left(\frac{\rho g x}{T} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T} \cosh \left(\frac{\rho g x}{T} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho g}{T} \cosh \left(\frac{\rho g x}{T} \right) = \frac{\rho g}{T} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\rho g x}{T} \right)^2}$$

$$\cosh \left(\frac{\rho g x}{T} \right) = \cosh \left(\frac{\rho g x}{T} \right)$$

y queda comprobado.

EJEMPLO 13. La velocidad "v" como función del tiempo "t" de un cuerpo de masa "m", que cae a través de un medio viscoso y que opone una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad, satisface la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

en donde g es la aceleración de la gravedad y k es una constante positiva. Comprobar que una solución de esta ecuación que cumple que la velocidad es cero en el tiempo cero, es

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)$$

Solución. Se parte de la ecuación diferencial, en la que se separan las variables para poder integral de la manera usual. Así

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad\Rightarrow\quad mdv - mgdt + kv^2dt = 0 \quad\Rightarrow\quad mdv - \left(mg - kv^2\right)dt = 0$$

se divide entre $mg - kv^2$ y se tiene que

$$\frac{m}{mg - kv^2}dv - dt = 0 \quad\Rightarrow\quad m\int\frac{dv}{mg - kv^2} - \int dt = 0$$

para resolver la primera integral se hace el cambio de variable

$$u^2 = kv^2;\quad u = \sqrt{k}\,v;\quad du = \sqrt{k}\,dv;\quad a^2 = mg;\quad a = \sqrt{mg}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\sqrt{k}}\int\frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{m}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{\sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg}} + C_1$$

luego, el resultado de las dos integrales es:

$$\frac{m}{\sqrt{k}\sqrt{mg}}\tanh^{-1}\frac{\sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg}} - t = C_2 \quad\Rightarrow\quad \tanh^{-1}\frac{\sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg}} = \left(t + C_2\right)\sqrt{\frac{kg}{m}}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \therefore \tanh\sqrt{\frac{kg}{m}}t = \frac{\sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg}} \Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)$$

***EJEMPLO 14**. El Radón es un gas que puede difundirse a través de materiales sólidos como tabiques y cemento. Si la dirección de la difusión en un muro de cimentación es perpendicular a la superficie, como se ilustra en la Figura 25, entonces la concentración de Radón "f(x)" (en joules/cm^3) en los poros llenos de aire existentes en el muro, a una distancia "x" de la superficie exterior puede ser aproximada por la expresión:*

$$f(x) = A \operatorname{senh}(px) + B\cosh(px) + K$$

donde la constante "p" depende de la porosidad del muro, de la vida media del Radón y de un coeficiente de difusión; la constante "K" es la máxima concentración de Radón en los poros llenos de aire; y A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Mostrar que $y = f(x)$ es solución de la ecuación de difusión:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2y + p^2K = 0$$

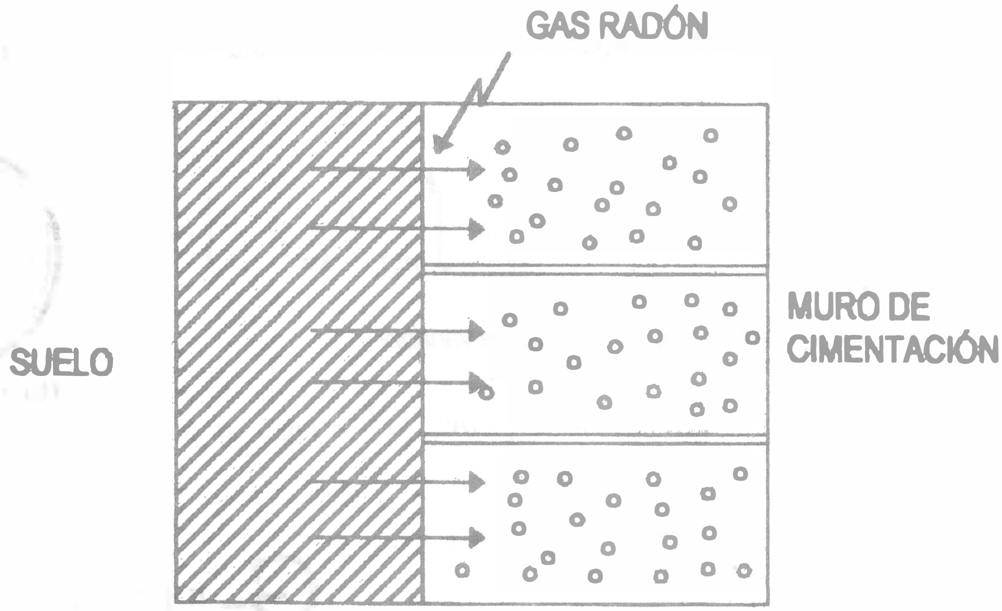


Figura 25

Solución. Se sustituyen la función y su derivada en la ecuación de difusión y se ve que la satisfacen. Así

$$y = A \operatorname{senh}(px) + B\cosh(px) + K \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = Ap\cosh(px) + Bp \operatorname{senh}(px)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ap^2 \operatorname{senh}(px) + Bp^2 \cosh(px)$$

luego,

$$Ap^2 \operatorname{senh}(px) + Bp^2 \cosh(px) - p^2[A \operatorname{senh}(px) + B\cosh(px) + K] + p^2K = 0$$

$$0 \equiv 0$$

por lo que f(x) es solución de la ecuación de difusión.

***EJEMPLO 15**. Cuando un trailer da vuelta en una esquina, sus ruedas posteriores describen una curva como la de la figura 26. Determinar la ecuación de esa curva si se considera a las llantas traseras como una masa "m" en el punto (1, 0), sobre el eje "x", unida mediante una varilla de longitud unitaria, a un punto "P" que representa la cabina en el origen. Cuando el punto "P" sube por el eje "y", arrastra a "m". La curva descrita por "m" se llama tractriz (del latín tractum, arrastrar), y se puede probar que es la gráfica de la función y = f(x) que resuelve el problema de condiciones iniciales:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad x = 1 \Rightarrow y = 0$$

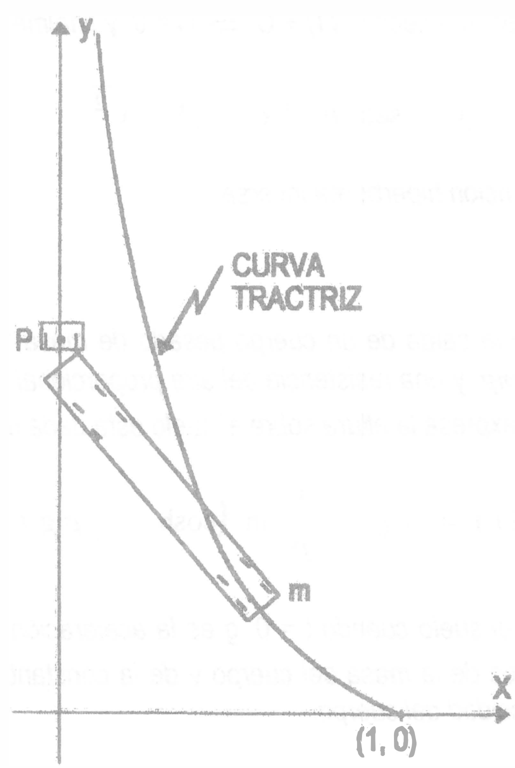


Figura 26

Solución. Para encontrar la ecuación pedida, se debe resolver el problema de valores iniciales y para ello se integra la derivada dada y se sustituyen los valores iniciales. Así:

$$dy = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \int \frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

la primera integral es directa por fórmula y para la segunda se realiza el cambio de variable:

$$u = 1 - x^2; \quad du = -2xdx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

por lo que

$$y = \sec h^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Como $x = 1 \Rightarrow y = 0$, entonces $0 = \mathrm{sech}^{-1}(1) + C \Rightarrow C = 0$ y finalmente la ecuación de la curva es

$$y = \sec h^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$$

expresión que contiene una función hiperbólica inversa.

***EJEMPLO 16**. En el caso de la caída de un cuerpo pesado de masa "m", bajo la influencia de la fuerza gravitacional $F_G = -mg$ y una resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad "v" del cuerpo, la función que expresa la altura sobre el suelo está dada por*

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{\rho}\ln\left(\cosh\sqrt{\rho g}\, t\right)$$

donde y_0 es la altura sobre el suelo cuando t = 0, g es la aceleración de la gravedad y > es una constante que está en términos de la masa del cuerpo y de la constante de proporcionalidad de la resistencia del aire con la velocidad del cuerpo.

i) Si $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ y $\rho = 6.78\cdot 10^{-3}$ joules, calcular la distancia que habrá caído y la velocidad que ha alcanzado después de cinco segundos.

ii) *¿Cuáles serían las respuestas sin considerar la resistencia del aire?*

Solución. i) Como se sabe $v(t) = \frac{dy}{dt}$*, luego*

$$v(t) = -\frac{1}{p} \cdot \frac{\sqrt{\rho g}\ \mathrm{senh}\ \sqrt{\rho g}\, t}{\cosh \sqrt{\rho g}\, t} = -\sqrt{\frac{g}{\rho}}\, \tanh \sqrt{\rho g}\, t$$

La distancia que ha caído está dada por:

$$d = \frac{1}{\rho} \ln(\cosh \sqrt{\rho g}\, t) = \frac{1}{6.78 \cdot 10^{-3}} \ln\left[\cosh \sqrt{6.78 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}\,(5)\right]$$

$$d = 147.4926 \cdot \ln[\cosh(1.2888)] = 147.4926 \cdot \ln(1.952) = 98.65\, m$$

y la velocidad se calcula como:

$$v = \sqrt{\frac{9.8}{6.78 \cdot 10^{-3}}}\, \tanh \sqrt{6.78 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}\,(5) = 38.0188 \cdot 0.8588 = 32.65\ \frac{m}{s}$$

ii) *Sin considerar la resistencia del aire, la distancia y la velocidad serían:*

$$d = \frac{gt^2}{2} = \frac{9.8 \cdot 5^2}{2} = 122.5\, m \qquad v = gt = 9.8 \cdot 5 = 49.0\ \frac{m}{s}$$

BIBLIOGRAFÍA

BOYCE DI PRIMA
CÁLCULO
CECSA
PRIMERA EDICIÓN, 1994

EDWARDS Y PENNEY
CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
PRENTICE HALL
SEGUNDA EDICIÓN, 1987

LARSON, HOSTETLER, EDWARDS
CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY
D.C. HEATH AND COMPANY
FIFTH EDITION, 1994

LEITHOLD
THE CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY
HARPER AND ROW PUBLISHERS
FOURTH EDITION, 1981

MIZRAHI AND SULLIVAN
CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY
WADSWORTH PUBLISHING COMPANY
1982

PINZÓN ALVARO
CÁLCULO I Y II
HARLA
1977

SHERMAN K. STEIN
CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
MC GRAW HILL
TERCERA EDICIÓN, 1982

STEWART JAMES
CÁLCULO
THOMSON EDITORES
TERCERA EDICIÓN, 1998

SWOKOWSKI, OLINICK, PENCE
CALCULUS
PWS PUBLISHING COMPANY. BOSTON
SIXTH EDITION, 1994

THOMAS / FINNEY
CÁLCULO, UNA VARIABLE
ADDISON-WESLEY-LONGMAN
NOVENA EDICIÓN, 1998

ZILL DENNIS G.
CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA
GRUPO EDITORIAL IBEROAMÉRICA
1987